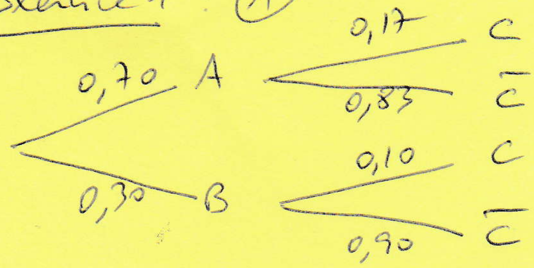
Corrigé Bac Blanc

Exercice 1 : A



1) $p(A\cap C) = p(A)\times p_A(C) = 0,70\times 0,17 = \boxed{0,119}$

2) D'après la formule des probabilités totales :

$p(C) = p(A\cap C) + p(B\cap C) = 0,119 + 0,30\times 0,10 = \boxed{0,149}$

3) $p_C(A) = \dfrac{p(A\cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,119}{0,149} = \boxed{\dfrac{119}{149} \simeq 0,799}$

B $X \sim \mathcal{B}(5\,;\,0,149)$

1) $p(X=5) = \binom{5}{5}\, 0,149^5 (1-0,149)^0 = \boxed{0,149^5} \simeq \boxed{7,3\times 10^{-5}}$

$\boxed{p(X=2) = \binom{5}{2} 0,149^2 \times (1-0,149)^3 \simeq 0,137}$

2) $\left.\begin{aligned} p(X\leq 3) &= p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)\\ &= 1-p(X>3) = 1-\big(p(X=4)+p(X=5)\big)\end{aligned}\right\} \simeq \boxed{0,998}$

$= \text{binomFRep}(5,\ 0,149,\ 3)$

C

1) $A = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} a\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} a\cos x\,dx = 2a\,[\sin x]_0^{\pi/2} = 2a\left[\overset{1}{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)} - \overset{0}{(\sin 0)}\right] = 2a$

2) on souhaite avoir $A_{disque} = A_{grisé} = A - A_{disque}$

$\Rightarrow \quad 2A_{disque} = A = 2a \Rightarrow A_{disque} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi a^2}{4} - a = 0 \Leftrightarrow a\left(\dfrac{\pi a}{4} - 1\right) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $\boxed{a = \dfrac{4}{\pi}}$

Ex3 : Partie 1

$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$ sur $[0;20]$

1) f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $[0;20]$ et on a :

$f'(x) = \big((x+1)\ln(x+1)\big)' - 3 = 1.\ln(x+1) + (x+1)\times\dfrac{1}{(x+1)} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3$
$= \ln(x+1) - 2.$

$u = x+1$ $\quad v = \ln(x+1)$
$u' = 1$ $\quad v' = \dfrac{1}{x+1}$

on a donc bien $\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}$

2) Nombre important !

$\ln(x+1) - 2 = 0$
$\ln(x+1) = 2$
$x+1 = e^2$
$\boxed{x = e^2 - 1}$
$(\in [0;20])$

⚠ $\ln(x+1) - 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq e^2 - 1$

3) $f'(0) = \ln(0+1) - 2$
$= \ln 1 - 2$
$= 0 - 2$
$\boxed{f'(0) = -2}$

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	↘	$f(e^2-1)$	↗	$21\ln 21 - 53$

(Suite Ex3)

$f(e^2-1) = (e^2-1+1)\ln(e^2-1+1) - 3(e^2-1) + 7 = e^2 \ln e^2 - 3e^2 + 10 = \boxed{10 - e^2}$

$f(20) = 21 \ln 21 - 53$

$f(0) = 7$

4) P_1 : Différence de hauteur : $f(20) - f(e^2-1) = 21 \ln 21 - 53 - (10 - e^2)$

$= 21 \ln 21 + e^2 - 63 \simeq 8{,}32 > 8$

donc $\boxed{P_1 \text{ est vraie}}$

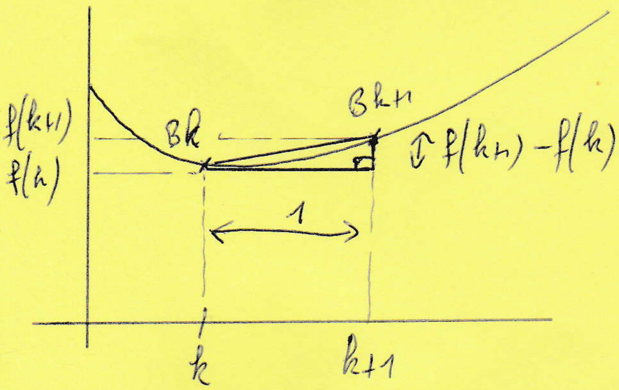
P_2 :

$\underline{P_2}$: Inclinaison en B : $|f'(0)| = |-2| = 2$

Inclinaison en C : $|f'(20)| = |\ln(21) - 2| = \ln(21) - 2 \simeq 1{,}04$

on a donc $|f'(0)| \simeq 2|f'(20)|$ donc $\boxed{P_2 \text{ est vraie}}$

Partie 2



1) D'après le théorème de Pythagore :

$B_kB_{k+1}^2 = 1^2 + (f(k+1) - f(k))^2$

$\Rightarrow \boxed{B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}}$

2) Aire de la partie roulante est la somme des rectangles de largeur B_kB_{k+1} et de longueur $BB' = CC' = DD' = 10$.

<u>Algorithme</u> :

Variables : S : réel ; K : entier

Fonction : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$

Traitement :
S prend la valeur 0
Pour K allant de 0 à 19
S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$
Fin Pour

longueur — Largeur

Sortie : Afficher S

Ex4 : (NON SPÉ)

$d_0 = 300$ et $a_0 = 450$ et $\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} d_n + \frac{1}{2} a_n + 70 \end{cases}$

1) $\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} d_0 + 100 = 150 + 100 = 250 \\ a_1 = \frac{1}{2} d_0 + \frac{1}{2} a_0 + 70 = 150 + 225 + 70 = 445 \end{cases}$

$\begin{cases} d_2 = \frac{1}{2} d_1 + 100 = 125 + 100 = 225 \\ a_2 = \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{2} a_1 + 70 = 125 + 222{,}5 + 70 = 417{,}5 \end{cases}$

2) Conjectures : (d_n) tend vers 200 et (a_n) vers 340.

3) $e_n = d_n - 200$

a) $e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2} d_n + 100 - 200 = \frac{1}{2} d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2} e_n$

$\Rightarrow (e_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) on a donc $e_n = e_0 q^n = (d_0 - 200)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = d_n - 200$

d'où $\boxed{d_n = 200 + e_n = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c) on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Conclusion : (d_n) converge vers 200, et la 1ère conjecture est vérifiée.

4) on admet que $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$: $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que $\forall n \geqslant 3$: $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ et Posons $A = 2n^2 - (n+1)^2$

$A = 2n^2 - (n^2 + 2n + 1) = n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 - 2$

$= (n-1)^2 - 2$

Si $n \geqslant 3$ on a $n - 1 \geqslant 2$ d'où $(n-1)^2 \geqslant 4$ et donc $A \geqslant 2 \geqslant 0$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 3$ on a bien $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

⚠ il y a plein d'autres façons de faire !

b) P_n : $\forall n \geqslant 4$: $2^n \geqslant n^2$. Initialisation : $\left.\begin{matrix} 2^4 = 16 \\ 4^2 = 16 \end{matrix}\right\}$ vrai.

Hérédité : Hypo $2^n \geqslant n^2$ pour un certain entier n.

A-t-on alors $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$?

or $2^n \geqslant n^2 \Rightarrow \underbrace{2^n \times 2}_{2^{n+1}} \geqslant 2n^2 \geqslant (n+1)^2$ d'après 4a)

$\Rightarrow P_n$ est héréditaire.

Suite EX4 (NON SPÉ)

Conclusion : la propriété P_n : $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$ est vraie car elle est initialisée à 4 et héréditaire.

c) Montrons que $\forall n \geq 4$: $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$

. on a clairement $0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $n \in \mathbb{N}$

. il reste à montrer que $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n} \quad \forall n \geq 4$

on a vu que $\forall n \geq 4 \quad 2^n \geq n^2$ donc $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$

$\times n$

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$\times 100$

$$\frac{100n}{2^n} \leq \frac{100}{n}$$

Puisque $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{100n}{2^n}$, on a bien $100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$

Conclusion : on a bien $\boxed{0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n} \quad \forall n \geq 4}$

d) Convergence de (a_n).

. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{100}{n} = 0$ donc en utilisant l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes, il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[100n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$$

. Par ailleurs $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(110\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$

Or l'énoncé donne : $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$.

on a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0 + 0 + 340 = 340}$ et la 2e conjecture est également démontrée.